# OMM - Nelinearne diferencne jednačine (nastavak)

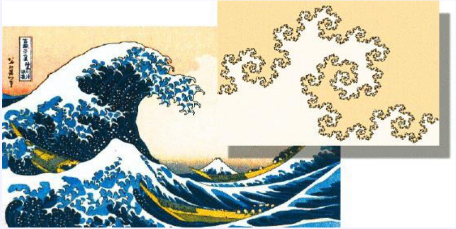
April 24, 2023

# Fraktali

# Fraktali

Fraktal je geometrijski lik koji se može razložiti na manje delove tako da svaki od njih, makar približno, bude umanjena kopija celine.

- Nova grana matematike, 19. i početak 20. veka.
- Daje opis mnogih prirodnih oblika (obale, planine, biljke, delovi ljudskog organizma,...)
- Naziv od latinske reči *fractus*, što znači razlomljen ili delić.



*"Oblaci nisu sfere, planine nisu konusi, razuđene obale nisu krugovi, kora drveta nije glatka." (Benoa Mandelbrot)*

# Gaston Julija (1893–1978)

- Francuski matematičar
- Proučavao funkciju $f(z) = z^2 + c$, i niz $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$, gde su $z_n, n \in \mathbb{N}$ i $c \in \mathbb{C}$ .
- Kakve su osobine funkcije $f^n(z)$ kada $n$ teži beskonačnosti (gde $f^n$ označava kompoziciju $f \circ ... \circ f$ sa $n$ članova).
- Od interesa su kompleksni brojevi $c$ za koje niz $f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), ...$ ostaje ograničen.
- Za različite vrednosti broja $c$ dobio je grafički prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravni, i ti se skupovi nazivaju po njemu - Julijini skupovi.

# Benoit Mandelbrot (1924–2010) – otac fraktalne geometrije

- Rođen u Poljskoj, studirao matematiku, diplomirao na univerzitetima u Francuskoj i SAD-u.
- 1975. dao definiciju fraktala.
- Posmatrao je istu funkciju $f(z)$ i dobijeni niz kao i Julija.
- Stvorio prvu "teoriju hrapavosti", i video je "hrapavost" u oblicima iz prirode (planine, obale i rečni slivovi, strukture biljaka, ...)
- Ideja je bila da stvori matematičku formulu za merenje ukupne "hrapavosti" takvih predmeta u prirodi.
- Rad *"Koliko je duga obala Britanije? Statistička samosličnost i frakcijska dimenzija"* (1967) je jedna od prvih Mandelbrotovih publikacija na temu fraktala. Ispituje paradoks obale: svojstvo da izmerena dužina dela obale zavisi od merila.

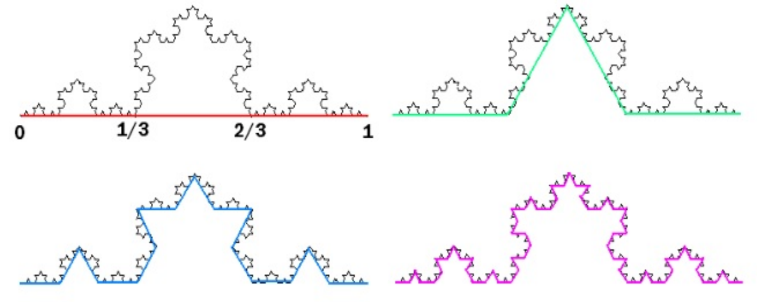
# Samosličnost

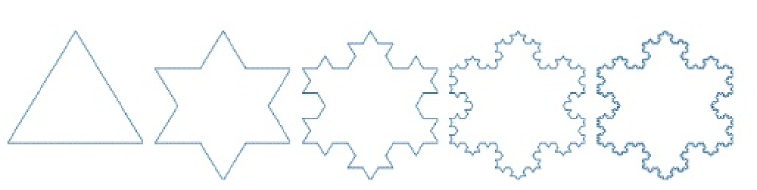
Objekti koji kada se uveličaju sami sebe sadrže.

- Potpuno slični fraktali – sadrže kopije koje su slične celom fraktalu (Kohova pahulja, trougao Sierpinskog,...)
- Kvazi samoslični fraktali – fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične celom fraktalu (Mandelbrotov skup, Julijin skup)
- Statistički samoslični fraktali – fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine(fraktalna dimenzija) ostaju iste pri različitim procenama (Peanov šum)

# Kohova kriva i pahulja

Helge von Koch (1870 - 1924)
Geometrijska konstrukcija



*Da li Kohova kriva u ravni ima konačnu dužinu (obim Kohove pahulje)?*

**Dužina Kohove krive (obim Kohove pahulje)**:
$L_n = 3(\frac{4}{3})^n$, gde je $n$ redni broj iteracije.
$\lim\limits_{n\to\infty} 3(\frac{4}{3})^n = \infty$

*Da li Kohova pahulja u ravni ima konačnu površinu?*

**Površina Kohove pahuljice**:
$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{(\frac{a}{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{(\frac{a}{9})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{(\frac{a}{9})^2\sqrt{3}}{4} + .... = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$$

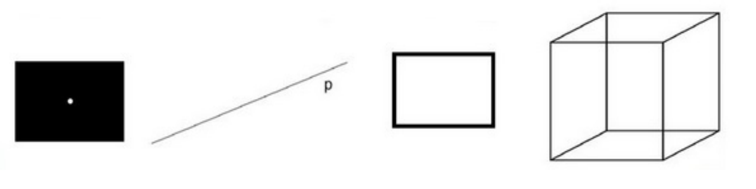
*Koja je dimenzija ovog skupa?*

# Fraktalna dimenzija

*Fraktali su objekti čija je fraktalna dimenzija strogo veća nego topločka.*

**Topološka dimenzija** – broj pravaca kojima bi se mogli kretati da se nalazimo u tom objektu. Uvek je **ceo broj**.

- Tačka - topološka dimenzija 0.
- Prava - topološka dimenzija 1.
- Geometrijski lik – topološka dimenzija 2
- Geometrijsko telo – topološka dimenzija 3.



**Fraktalna dimenzija** – vrednost koja nam govori o tome u kolikoj meri objekat ispunjava prostor. Opisuje izlomljenost ili hrapavost objekta. Za fraktale uglavnom **nije ceo broj**.

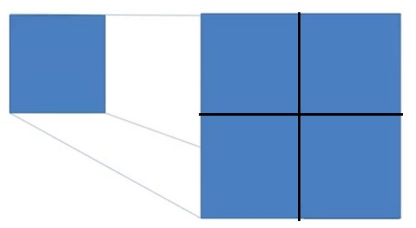
- $D$ - (fraktalna) dimenzija
- $N$ - broj objekata posmatranih nakon smanjenja/uvećanja
- $k$ – faktor smanjenja/uvećanja, $N = k^D$.
- $D = \log_k N = \frac{\ln(N)}{\ln(k)}$

**Linija:**

Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 2$ kopije polazne duži.

$D = \log_2 2 = 1$

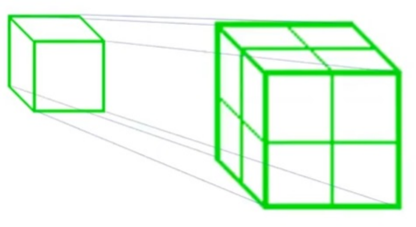
**Kvadrat:**



Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 4$ kopije polaznog kvadrata.

$D = \log_2 4 = 2$

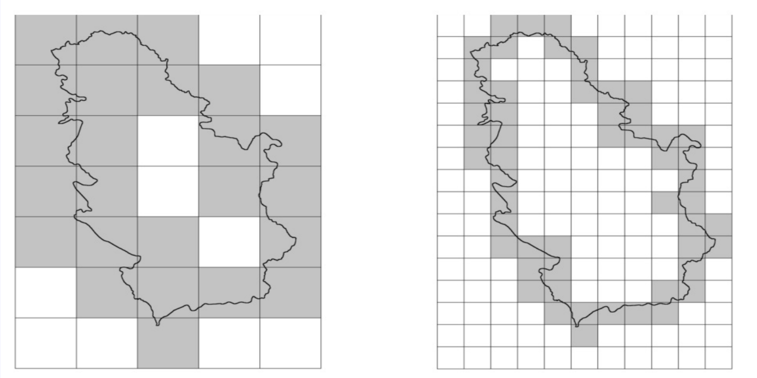
**Kocka:**



Uvećali smo za $k = 2$ i dobili $N = 8$ kopija polazne kocke.

$D = \log_2 8 = 3$

Prekrijemo objekat mrežom jednakih kvadrata određene veličine i prebrojimo kvadrate koji u sebi sadrže delove datog objekta.



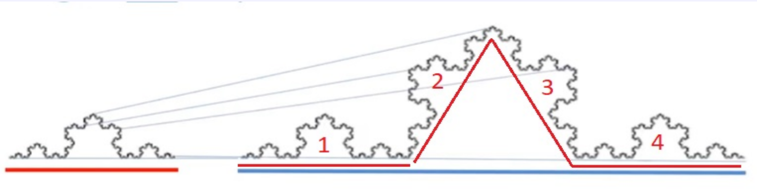
Onda se taj isti objekat prekriva mrežama identičnih kvadrata drugih veličina i postupak se ponavlja.

$N$ - broj popunjenih kvadrata.

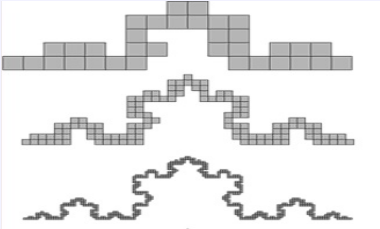
$r$ - veličine kvadrata.

$D = \lim_{r \to 0} \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$

**Fraktalna dimenzija Kohove krive**:



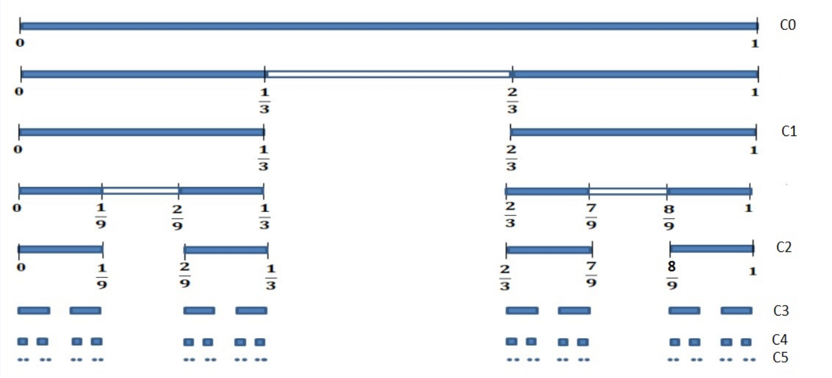

Uvećali smo $k = 3$ puta i dobili $N = 4$ kopije istog objekta.
$D = \log_k N = \log_3 4 \approx 1.262.$



**Osobine Kohove pahulje/krive**:

- Ograničena figura konačne površine ima beskonačan obim.
- Fraktalna dimenzija je razlomljen broj.
- Neprekidna svuda.
- Nigde nije diferencijabilna.
- Potpuno sličan fraktal.

# Kantorov skup (Kantorova prašina)



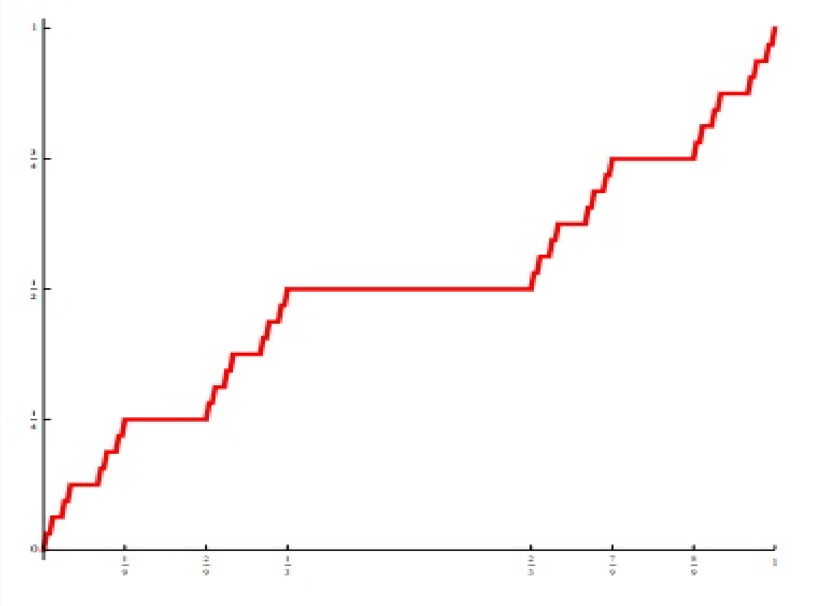

- $C_0 = [0, 1]$
- $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (iz $C_0$ izbacimo središnji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$)
- $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (iz $C_1$ izbacimo središnje intervale)
- ...

$$\boxed{\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_n &= \frac{C_n - 1}{3} \bigcup \left( \frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3} \right) \\ C &= \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \end{aligned}}$$

- $C \neq \emptyset$ (jer je zatvoren)
- $C$ je neprebrojiv (može se dokazati).
- Dužina izbačenih delova:
  $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + ... = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$
- Mera skupa $C$ je 0.
- Fraktalna dimezija skupa:
  broj kvadrata: $N = 2^n$, veličina stranice kvadrata $r = (\frac{1}{3})^n$
  $D = \lim_{r \to 0} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \log_3 2 \approx 0.6309$

# Kantorova funkcija (Đavolje stepenice)

- Definišimo $f(0) = 0, f(1) = 1$.
- Na prvom izbačenom intervalu $(1/3, 2/3)$ definišimo $f(x) = 1/2$.
- Za svaki od ostalih izbačenih delova definičimo da je funkcija poluzbir najbližih većdefinisanih vrednosti sa leve i desne strane.
- Dodefinišimo funkciju $f(x)$ na Kantorovom skupu do neprekidnosti:
  - Za svako $x \in C$ levo od nje $f(x)$ je monotono neopadajuća i ograničena odozgo $\Rightarrow \exists \sup f^-$.
  - Za svako $x \in C$ desno od nje $f(x)$ je monotono nerastuća i ograničena odozdo $\Rightarrow \exists \inf f^+$.
  - Za svako $x \in C$ definišimo $f(x) = \sup f^- = \inf f^+$.


1
3/4
1/2
1/4
0
1/9
2/9
1/3
2/3
7/9
8/9
1

Kantorova funkcija je:

- monotona
- neprekidna
- preslikava $[0, 1]$ na $[0, 1]$
- Tačke $x \in C^c$ (komplement Kantorovog skupa) se slikaju u racionalne brojeve $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, ...)$
- Tačke $x \in C$ se slikaju u iracionalne vrednosti na $[0, 1]$ i neke racionalne.
- Kardinalnost Kantorovog skupa ne može biti manja od kardinalnosti skupa iracionalnih brojeva, a to je kontinuum (iako mu je mera 0).
- $f(x)$ ima skoro svuda izvod jednak 0, iako funkcija nije konstanta.
- Grafik $f(x)$ je fraktalni skup.

# Primena? [1]

VELIKO OTKRIĆE

## ĐAVOLJE STEPENICE: Mozak ubice funkcioniše po jednoj matematičkoj formuli! Otkrijte kojoj...

**LUDI SVET**

13.02.2014. 16:45h ▸ 10:54h

**Matematičari su utvrdili su da se serijske ubice drže određenog ritma na koji utiče rad neurona u mozgu**

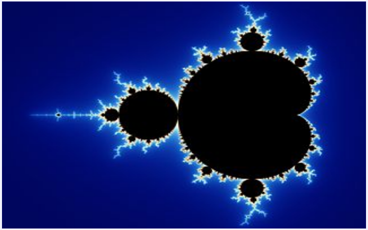
SAD - Dvojica matematičara **M. V. Simkin i V. P. Rojčovduri** sa Univerziteta Kalifornija potvrdili su da je uzorak ubistava koje počine serijski ubice u skladu sa Kantorovom funkcijom, odnosno strogom matematičkom formulom popularno nazvanom "**đavolje stepenice**".

[1] Izvor: Kurir

# Mandelbrotov skup

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = 0, \; c \in \mathbb{C}$$

Ukoliko postoji konstanta $M$ takva da je $|z_n| < M$ (niz $z_n$ je ograničen) za svako $n = 1, 2, ...$ onda tačka $c = a + ib$ pripada Mandelbrotovom skupu.



- Ako tačka $c$ pripada Mandelbrotovom skupu bojimo je u jednu boju (npr. crnu).
- U suprotnom, ako tačka $c$ ne pripada Mandelbrotovom skupu bojimo je u drugu boju (npr. belu).
- Opcija sa više boja: boja tačke $c$ koja ne pripada skupu se određuje kao $\min\{n \in \mathbb{N} : |z_n| > M\}$

# Mandelbrotov skup

*Ako je* $|z_n| > 2,\ (M = 2)$, *onda niz divergira.*

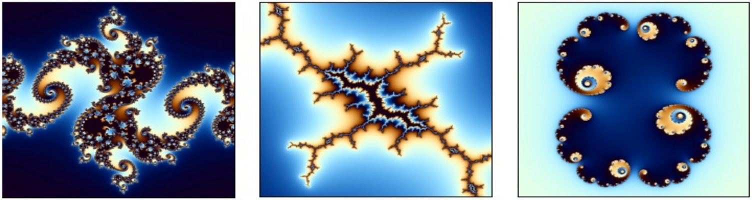
Za svaki piksel $c$ posmatra se niz $f_c(0), f_c^2(0), f_c^3(0), ..., f_c^N(0)$, gde je $c$ kompleksan broj određen pikselom, a $N$ maksimalan broj iteracija. Ako je navedeni niz ostao ograničen kružnicom poluprečnika $R = 2$, tada smatramo da tačka $c$ pripada Mandelbrotovom skupu. U suprotnom smo sigurni da ona ne pripada Mandelbrotovom skupu.

- Jedinstven
- Ograničen skup
- Beskonačan obim
- Povezan skup
- Kvazi samosličan (sadrži umanjene kopije sebe, ali one nisu potpuno slične celom fraktalu)

# Julija skupovi

$z_{n+1} = z_n^2 + c$, $c$ fiksirano, $z_0 \in \mathbb{C}$

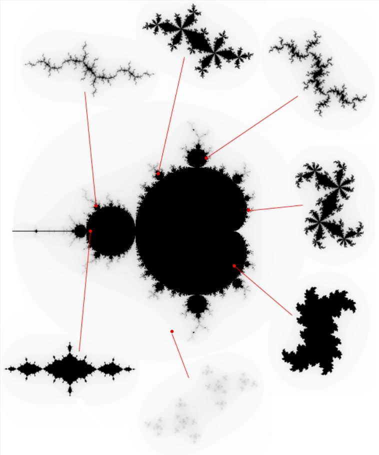
- Princip sličan: fiksiramo $c$ i za svako $z_0 \in \mathbb{C}$ ispitujemo da li je niz $z_n$ ograničen ($z_0$ pripada Julija skupu - crni piksel) ili neograničen ($z_0$ ne preipda Julija skupu - beli piksel ili neka boja)



$c = -.79 + .15i$ $c = -.162 + 1.04i$ $c = .3 - .01i$

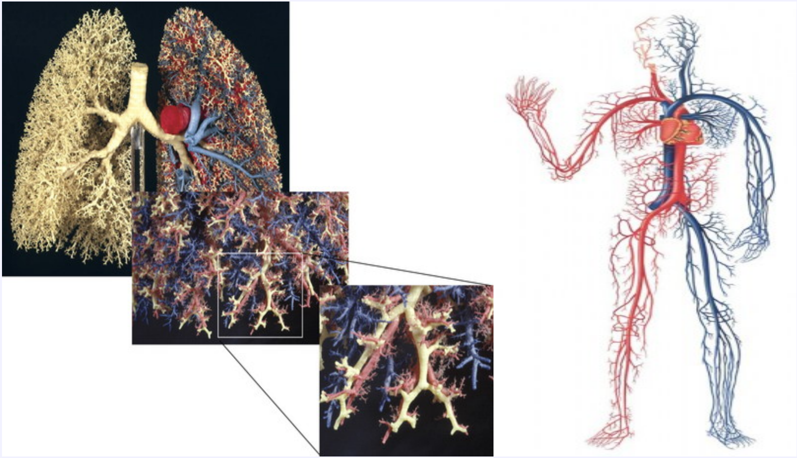
- Ima ih peskonačno mnogo (za svako $c$ imamo drugačiji Julija skup)
- Može biti povezan i nepovezan (za različite $c$)
- Kvazi samosličan

# Veza Julija i Mandelbrot skupova



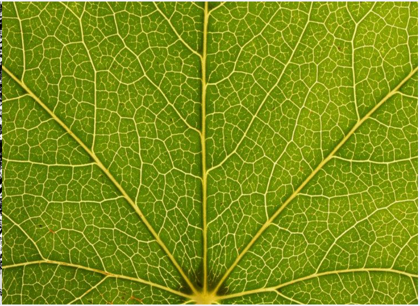
- Julijini skupovi za vrednost *c* koja pripada Mandelbrotovom skupu su povezani.
- Julijini skupovi za vrednost *c* koja ne pripada Mandelbrotovom skupu nisu povezani.
- Julijini skupovi za vrednost *c* koja je dalje od Mandelbrotovog skupa imaju veću fragmentaciju, sve dok ne postanu skoro kao prah.

# Živa bića kao fraktali



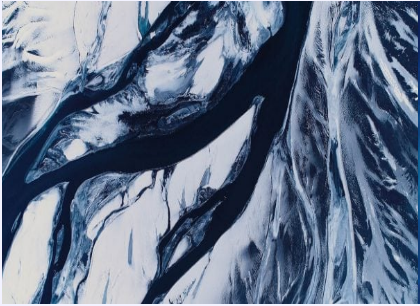
# Grom/struja

# Drveće kao fraktali



# Biljke kao fraktali


# Pejzaži



# Iteracije sistema funkcija

*Da li je moguće za neki Julija skup ili Mandelbrot skup nacrtati njegovu granicu tako da taj fraktal bude čudan atraktor za neko preslikavanje?*

Cilj:

Na taj način bi umesto da za svaku tačku formiramo niz koji odlučuje da li tacku bojimo ili ne, formirali samo jedan niz (kao npr. kod Henonovog atraktora) koji crta sve tačke tog niza (eventualno počevši od neke, npr. 200)

Problem:

Za svaku tačku koja ne pripada Julija skupu, niz $z_{n+1} = z_n^2 + c$ divergira, tj. odbija tačke od Julija skupa (umesto da privlači) - granica Julija skupa nije atraktor tog preslikavanja!

Ideja:

Ako preslikavanje $F : z \to z^2 + c$ odbija tačke od Julija skupa, da li će njemu inverzno preslikavanje $F^{-1}$ da ih privlači ka Julija skupu?

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy, x = Re(z), y = Im(z) \\
C &= a + ib \\
F(x,y) &= z^2 + c \\
&= (x + iy)^2 + (a + ib) \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + a + ib \\
&= x^2 - y^2 + a + i(2xy + b) \\
F(x,y) &= (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)
\end{aligned}
$$

Direktno: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$
Inverzno: $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F^{-1}(x_n, y_n)$

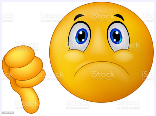
Novi problem:

$F^{-1}(x,y)$ nije jednoznačno određena.
1 tačka se slika u 2 različite tačke.

$$\boxed{F^{-1}(x,y) = \left(\pm f(x,y), \pm \frac{y-b}{2f(x,y)}\right)}$$

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{2}}$$

Eksponencijalna složenost
1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024... tačaka



(Loše) rešenje problema:
Opredelimo se samo za jednu od 2 slike, npr.
$F^{-1}(x,y) = \left(+f(x,y), +\frac{y-b}{2f(x,y)}\right)$
Posledica:
Ne dobijamo celu sliku (celu granicu Julijinog skupa), nego samo njen deo.

(Dobro) rešenje problema:
Svaki sledeći član niza se određuje koristeći samo jednu kombinaciju $(\pm..., \pm...)$, a izbor kombinacije u tekućoj iteraciji zavisi od unapred zadatih verovatnoća.

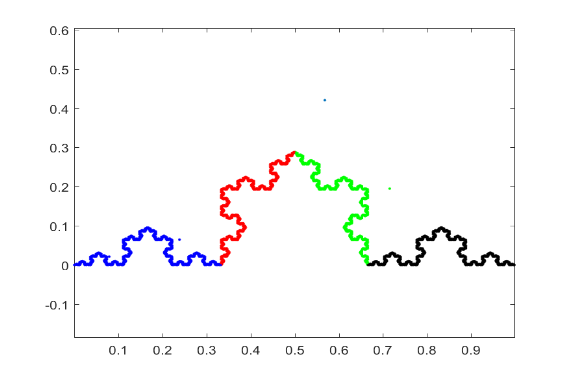
# Iteracije sistema funkcija (IFS)

- Zadatih $k$ preslikavanja ravni u ravan:
  $F_1(x, y), F_2(x, y), ..., F_k(x, y)$.
- Svakom preslikavanju je pridružena verovatnoća $p_1, p_2, ..., p_k$.
- $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ (naravno).
- Izaberemo $(x_0, y_0)$ proizvoljno.
- U svakoj iteraciji:
  - Na slučajan način (sa verovatnoćama $p_i$) biramo jedno od $k$ mogućih preslikavanja $F_i$.
  - $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_i(x_n, y_n)$.

# Kohova pahulja (IFS)

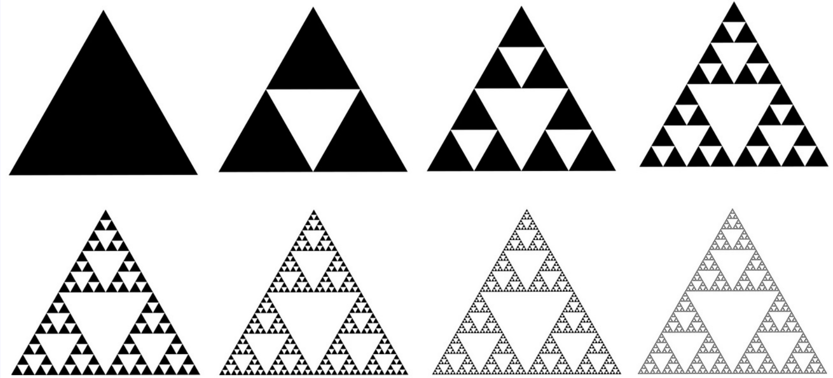
$$F_1(x,y) = (\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y)$$
$$F_2(x,y) = (\tfrac{1}{6}x - \tfrac{\sqrt{3}}{6}y + \tfrac{1}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{6}x + \tfrac{1}{6}y)$$
$$F_3(x,y) = (\tfrac{1}{6}x + \tfrac{\sqrt{3}}{6}y + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{6}x + \tfrac{1}{6}y + \tfrac{\sqrt{3}}{6})$$
$$F_4(x,y) = (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}y)$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \tfrac{1}{4}$$



# Trougao Sjerpinskog

Geometrijska konstrukcija

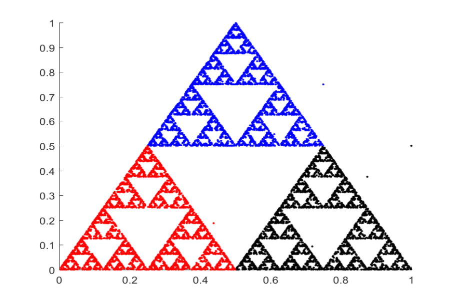


Potpuno sličan fraktal, površina teži nuli, $D = \log_2 3 = 1.585$.

# Trougao Sjerpinskog (IFS)

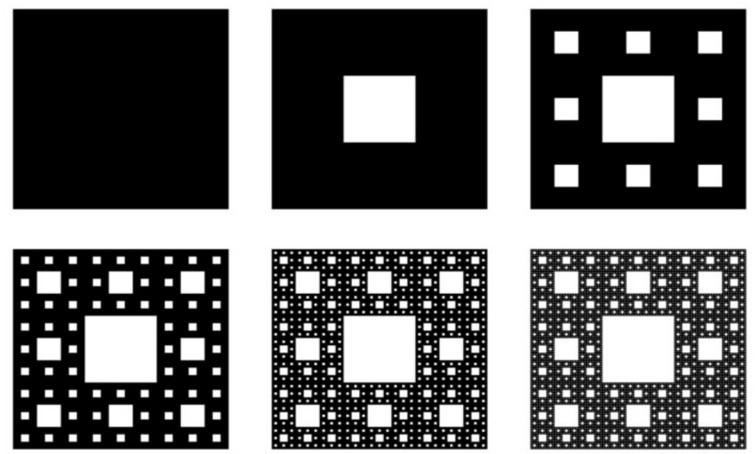
$F_1(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$
$F_2(x, y) = (\frac{2x+1}{4}, \frac{y+1}{2})$
$F_3(x, y) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$

$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$

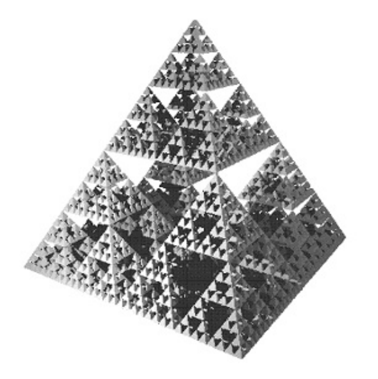


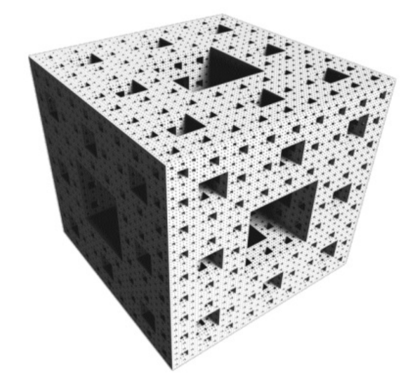

- $F_1$ je homotetija (skupljanje za faktor 2 oko koordinatnog početka).
- $F_2$ i $F_3$ su linearne transformacije.
- $x$-koordinata utiče samo na $x$-koordinatu nove tačke. Analogno za $y$-koordinatu.

# Tepih Sjerpinskog



# 3D verzije





Sjerpinski piramida i Mengerov sunđer

Objekti beskonačne površine, ali zapremina im konvergira ka nuli.

# Barnslijeva paprat

$$F_1(x, y) = (0.85x + 0.04y + 0.075, -0.04x + 0.085y + 0.018)$$
$$F_2(x, y) = (0.2x - 0.26y + 0.4, 0.23x + 0.22y + 0.045)$$
$$F_3(x, y) = (-0.15x + 0.25y + 0.575, 0.26x + 0.24y - 0.086)$$
$$F_4(x, y) = (0.5, 0.16x)$$

$$p_1 = 0.77, p_2 = 0.12, p_3 = 0.10, p_4 = 0.01$$